

СЕМЕРИКОВ А. В.

СОПОСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ИМИТАЦИОННОЙ ПРОЦЕССНОЙ МОДЕЛЬЮ

УДК 378.141.21:330.47, ВАК ВАК 05.13.01:08.00.05, ГРНТИ 28.17.19

Сопоставление общей модели системы массового обслуживания с имитационной процессной моделью

Comparison of the general model of queuing system with simulation of the process model

А. В. Семериков

A. V. Semerikov

Ухтинский государственный технический университет, г. Ухта

Ukhta State Technical University, Ukhta

В статье представлены модели системы массового обслуживания СМО на основе общей модели, полученной из уравнения баланса входных и выходных потоков клиентов, и имитационной процессной модели, построенной с помощью инструментального средства AnyLogic 8. Исследования, выполненные на имитационной модели, позволили установить, что максимальную прибыль от работы СМО можно получить при меньшей величине вероятности обслуживания и меньшей занятости сервиса, чем при расчетах по общей модели. Наряду с этим, также было установлено, что при определенных условиях, например при времени ожидания в очереди равном нулю, результаты расчетов по обеим моделям совпадают.

The article presents a model of a Queuing system QS on the basis of the General model, obtained from the balance equation of input and output-currents clients, and simulation of process models constructed using the tool AnyLogic 8. Studies carried out on the simulation model made it possible to establish that the maximum profit from the work of the QMS can be obtained at a lower probability of maintenance and less employment of the service than in the calculations of the General model. In addition, it was also found that, under certain conditions, such as waiting time in a queue of zero, the results of calculations on both models are the same.

Ключевые слова: *общая модель, СМО, имитационное моделирование, процессная модель оптимизационная задача, эксперимент, вероятность обслуживания, клиент, сервис, очередь*

Keywords: *common model, SMO, simulation, process model optimization instability and risk the task, the experiment, the probability of service, customer, service, turn*

Введение

Большинство людей в своей повседневной жизни встречаются с системами массового обслуживания СМО. Например, к ним можно отнести продовольственный магазин, банк, почтовое отделение и так далее, в которых человек (клиент) получает некоторые услуги. Кроме того, к СМО можно отнести и системы, в которых в качестве клиента выступает не человек. Так при обработке детали на станке в качестве клиента выступает деталь, в качестве сервиса станок.

При всем многообразии СМО в каждой из них происходит всего два события приход и уход клиента. При входе клиента в СМО он встает в очередь, если сервис занят, и попадает на обслуживание при освобождении последнего. Клиент может покинуть очередь и не дождавшись обслуживания по причине большой очереди или большого времени ожидания. Изучение очередей позволяет определить критерии функционирования обслуживающей системы. Наиболее значимыми из них являются среднее время ожидания в очереди и средняя длина очереди. На основе этих сведений выбирается надлежащий уровень обслуживания, на пример количество сервисов.

В общей СМО имеется как входной, так и выходной потоки клиентов. Время между последовательными поступлениями клиентов и время обслуживания описываются экспоненциально распределенными случайными величинами. При моделировании этой системы предполагается, что она функционирует в течении большого промежутка времени и в ее работе наступает стационарный режим. Кроме того предполагается, что интенсивность поступления λ_n клиентов и интенсивность обслуживания μ_n зависит от числа n клиентов в СМО. Используя эти допущения получено выражение для определения вероятности P_n нахождения клиентов в системе [1].

$$P_n = \left(\frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_n}{\mu_{n-1} \mu_{n-2} \dots \mu_n} \right) \cdot P_0, n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

где P_0 – вероятность нахождения ноль клиентов в СМО. Она определяется из выражения $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$.

Применяя выражение (1), можно оценить вероятность обслуживания клиентов при различных значениях состояния занятости сервисов.

Оценить работу системы можно также по предельным вероятностям состояния системы. Для их расчета имеются выражения [2]

$$P_1 = \frac{\rho^1}{1!} \cdot P_0; P_2 = \frac{\rho^2}{2!} P_0 \dots P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0 \quad (2)$$

$$P_0 = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right) \quad (3)$$

где $P_0, P_1, P_2 \dots P_n$ это вероятность занятости сервисов в количестве 0, 1, 2, ..., n единиц; $\rho = \lambda/\mu$ – представляет собой среднее число заявок, приходящих в СМО за среднее время обслуживания одной заявки. В рассматриваемой СМО отказ от обслуживания клиентов наступает при занятости всех сервисов n , то есть при $P_{\text{ОТКАЗ}} = P_n$.

Вместе с тем при таком подходе не представляется возможным установить степень влияния длины очереди на эффективность функционирования СМО, так как в этом случае предполагается длина очереди равна нулю (клиент покидает систему, если видит, что сервисы заняты предыдущими клиентами). На практике такой случай является редкостью. Как правило клиент оценивает время возможного нахождения в очереди и количество клиентов впереди себя, а потом принимает решение о дальнейшем пребывании в системе.

В настоящее время широко используются модели СМО, построенная с использованием имитационного моделирования ИМ, с помощью которого представляется возможным получить объективную оценку функционирования СМО для принятия обоснованных проектных решений.

Экспериментальная часть

Для сопоставления оценок параметров функционирования СМО, полученных с помощью выражений (1)–(3) и с использованием ИМ, рассмотрим конкретный пример. В цех для обслуживания поступают в среднем 15 чел. в час. Среднее время обслуживания одного клиента составляет 12 минут. Обслуживание всех клиентов должна быть произведено с большой вероятностью. Необходимо определить количество работников для выполнения заказов при заданной вероятности, на пример 0.95 [3, 4].

Рассмотрим работу СМО с одним, двумя и тремя работниками. Клиенты обслуживаются без очереди, но с возможным отказом от обслуживания. Один работник может обслуживать 5 клиентов в час, интенсивность обслуживания $\mu = 5 \frac{1}{\text{час}}$, интенсивность поступления составляет 15 клиентов в час $\lambda = 15 \frac{1}{\text{час}}$, тогда $\rho = \frac{15}{5} = 3$. Вероятность отказа в обслуживании согласно общей модели СМО составляет:

$$\text{с одним работником} \quad P_1 = \frac{\rho^1}{1!} \cdot P_0; \quad P_1 = \frac{3^1}{1!} \left(1 + \frac{3}{1}\right)^{-1} = 0.75 \quad (4)$$

$$\text{с двумя работниками} \quad P_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot P_0; \quad P_2 = \frac{3^2}{2!} \cdot \left(1 + \frac{3}{1} + \frac{3^2}{2!}\right)^{-1} = 0.52 \quad (5)$$

$$\text{с тремя работниками} \quad P_3 = \frac{\rho^3}{3!} \cdot P_0; \quad P_3 = \frac{3^3}{3!} \cdot \left(1 + \frac{3}{1} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}\right)^{-1} = 0.346 \quad (6)$$

Проведенный расчет показывает, что вероятность отказа даже при трех работниках достаточно высокая. Более трети заказов не выполнено. Вероятность обслуживания равна $1 - 0.346 = 0.654$. Для поднятия исполнительской дисциплины предприятия необходимо увеличивать количество работников. Это, естественно, должно увеличит вероятность обслуживания.

Представленные результаты расчета СМО можно оценить на основе простейшей ИМ (рис. 1), построенной с использованием приложения Anylogic 8.2.3 [5].

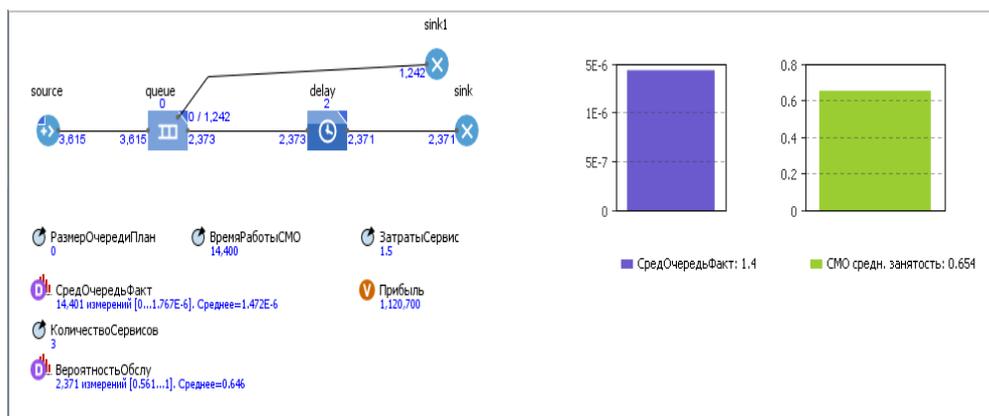


Рисунок 1. Имитационная Модель СМО

Для моделирования рассматриваемой СМО использованы объекты: source, queue, delay, sink, sink1. Имитационная модель работает следующим образом. В объект source поступают клиенты, время между прихода которых генерируется согласно экспоненциальному закону (среднее время между приходами составляет $t_{\text{прих}}$ минут). Затем клиент попадает в объекте queue (очередь), в котором они ожидают обслуживания. Параметры очереди могут быть различные и назначаются в зависимости от текущей задачи. При вычислении величины вероятности отказов по выражениям (2), (3) полагалось, что длина очереди равна 0. Поэтому в объекте queue назначен параметр, согласно которому время нахождения прибывающих клиентов равно нулю. Это означает что все прибывшие клиенты попадают на обслуживание сразу в объект delay, (сервис свободен) либо сразу же покидают СМО (сервис занят), попадая в объект sink1. В последнем накапливается статистика по количеству необслуженных клиентов. В объекте delay генерируется время обслуживания клиентов согласно экспоненциальному закону (среднее время обслуживания составляет $t_{\text{обсл}}$) и накапливается статистика по времени пребывания клиентов, по количеству обслуженных клиентов. После обслуживания клиенты попадают в объект sink, который выводит клиентов из системы и позволяет рассчитать статистику пребывания клиента в СМО.

Согласно представленной на рисунке 1 модели при $t_{\text{прих}} = 4$ мин и $t_{\text{обсл}} = 12$ мин и времени моделирования 14400 мин вероятность отказа в обслуживании клиентов составляет: с одним работником $P_1 = 0.75$, с двумя работниками $P_2 = 0.55$, с тремя работником $P_3 = 0.36$. Представленные расчеты позволяют сказать, что имитационная модель показывает результаты адекватные общей модели СМО (1)–(3), что и следовало ожидать, так как время ожидания в очереди равно нулю.

Кроме того, с помощью имитационной модели представляется возможным определить следующее: количество обслуженных клиентов, количество необслуженных клиентов, занятость сервиса. Эти показатели работы СМО соответственно равны:

- при наличии одного работника 897 чел, 2688 чел, 0,74;
- при наличии двух работников 1847 чел, 2024 чел, 0,72;
- при наличии трех работников 2373 чел, 1242 чел, 0,65.

Отсюда можно сделать такой вывод: при увеличении количества работников занятость сервиса меняется очень слабо. Это объясняется тем, что в модели заложено значения параметра ожидания в очереди равного нулю. Поэтому занятость определяется напрямую приходом клиента.

Если положить значение длины очереди $m > 0$, занятость сервиса будет зависеть как от количества входящих в СМО клиентов так и длины очереди. Так, при планируемой длине очереди $m = 3$ чел. и количестве работников в количестве 3 чел. вероятность обслуживания равняется 0.83, занятость сервиса становится равной 0.8. При этом количество обслуженных клиентов равно 3009 чел., а необслуженных 597 чел., средняя очередь около 1 чел. Эти результаты расчета не совпадают с результатами расчета по общей модели. Для улучшения показателей работы предприятия необходимо обращать внимание на организацию очереди, в которой клиенту захотелось бы остаться подольше. В то же время, как показывают расчеты, увеличение планируемой очереди в два раза не приносит в рассмотренном примере существенного увеличения вероятности обслуживания и занятости сервиса. Таким образом, сопоставление представленных результатов указывает на важность учета наличия очереди в СМО.

Каждая СМО создается для получения прибыли. Поэтому назначение количества сервисов и длины очереди можно осуществлять так же на основании максимизации последней. Максимум функции прибыли соответствует оптимальным параметрам. Целевая функция прибыли при этом содержит в качестве переменных количество обслуженных клиентов, количество сервисов, длину очереди. Параметрами в ней выступают доход от одного клиента, затраты на один сервис, затраты на содержание очереди.

Выбор оптимальных параметров СМО представляется возможным при решении задачи оптимизации с использованием ИМ (рис. 1). Для иллюстрации решения оптимизационной задачи назначим стоимостные параметры СМО: доход от одного клиента в среднем 500 руб., затраты на одно место очереди 300 руб. и затраты в единицу времени на один сервис 1.5 руб. При этих параметрах максимальная прибыль СМО, функционирующая в течении 14400 мин, оценивается в размере 1635 т. руб. Оптимальные параметры при этом составляют: планируемый размер очереди 2 чел., количество сервисов 6 чел., количество обслуженных клиентов 3003 чел. Максимальное значение прибыли достигается при вероятности обслуживания 0.97 и средней занятости сервиса 0.5.

Представленные примеры наглядно показывают, что при определенных входных данных оценка эффективности СМО на основе ИМ совпадает с оценкой эффективности СМО по общей модели [1]. Этот вывод основан на совпадении величин вероятностей обслуживания клиентов и средней занятости сервисов. В то же время эксперименты, проведенные с различными стоимостными параметрами, и дальнейший анализ результатов расчета позволил установить, что максимальная прибыль достигается при меньшей вероятности обслуживания занятости сервисов. Другими словами, для получения максимальной прибыли необязательно должна быть максимальная занятость сервиса. Данное утверждение согласуется с теорией принятия решения: отказ от обслуживания некоторых клиентов [1].

На основе исследования модели СМО можно разработать рекомендации по рациональному построению СМО и рациональной организации их работы и регулированию потока клиентов. Для увеличения количества обслуженных клиентов, а значит и увеличение вероятности обслуживания можно организовать различные виды потоков клиентов. Например можно организовать работу СМО следующим образом. В начале работы СМО свободным является только один их сервисов. Остальные сервисы считаются неработающими. При превышении определенного количестве клиентов в очереди у первого сервиса открывать второй сервис. При превышении определенного количестве клиентов в очереди у второго сервиса открывать третий сервис и т. д. Эффективность такой организации обслуживания можно оценить на основе общей модели [1].

Положим, что в СМО имеется 3 сервиса. Открытие нового сервиса производится при занятости текущего сервиса. Для оценки параметров этой СМО рассмотрим поэтапное решение, которое заключается в следующем. Вначале примем допущение, что все сервисы работают независимо друг от друга. Тогда расчет вероятности обслуживания клиентов может быть определена по формулам (1)–(3) отдельно для каждого сервиса. Ожидаемое количество поступающих клиентов в первый сервис определяется как произведение времени функционирования СМО на интенсивность поступления. Для рассматриваемого примера имеем $14400 \cdot 15/60 = 3600$ чел. Тогда ожидаемое количество не обслуженных клиентов в первом сервисе определяется по вероятности не обслуживания 0.75 на этом сервисе и составит $3600 \cdot 0.75 = 2700$ чел. Вероятность обслуживания на первом сервисе определяется по выражению (4). Клиенты в количестве 900 чел. переходят во второй сервис, в котором ожидаемое количество необслуженных составит $2700 \cdot 0.75 = 2025$ чел. И наконец, в третьем сервисе количество необслуженных клиентов равно $2025 \cdot 0.75 = 1519$ чел. Таким образом, общая вероятность отказа от обслуживания составляет $1519/3600 = 0.42$.

Теперь проведем расчет вероятности отказа от обслуживания, используя ИМ. Модель СМО в этом случае имеет следующий вид рисунок 2.

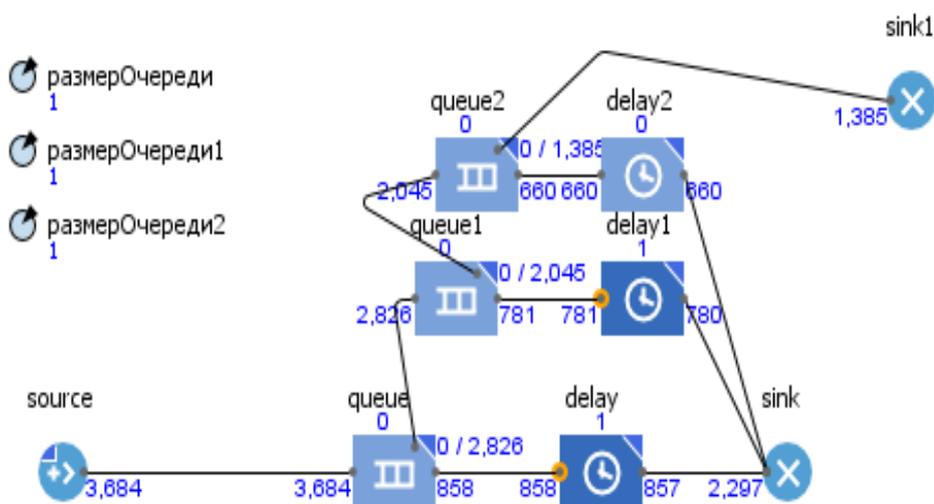


Рисунок 2. Имитационная Модель СМО. Последовательное включение сервисов

На рисунке 2 наглядно показано как необслуженные клиенты из первой очереди queue переходят во вторую очередь queue1. Далее необслуженные клиенты из второго сервиса переходят в третий сервис. И наконец из третьего сервиса необслуженные клиенты вовсе покидают СМО через объект sink1.

Для сравнения результатов расчета в качестве входные данных приняты входные данные из предыдущего примера расчета, в котором полагалось, что длина очереди равна 0 (клиент покидает сервис, если он занят). На рисунке видно, что общее количество входящих клиентов равно 3694, а количество необслуженных клиентов равно 1385. Поэтому вероятность в отказе от обслуживания оценивается как $1385/3694=0.37$. На основании этого результата расчета можно сделать заключение, что в данном случае ИМ согласуется с общей теорией СМО, в которой не рассматривается влияние размера очереди на параметры СМО.

Для уяснения этого влияния рассмотрим этот же пример с размером планируемой очереди 1 чел и 10 чел, а затем с с размером планируемого времени нахождения в очереди 5мин и 10мин, используя ИМ. Результаты расчета представлены на рис.3, рис4, рис.5, рис6,

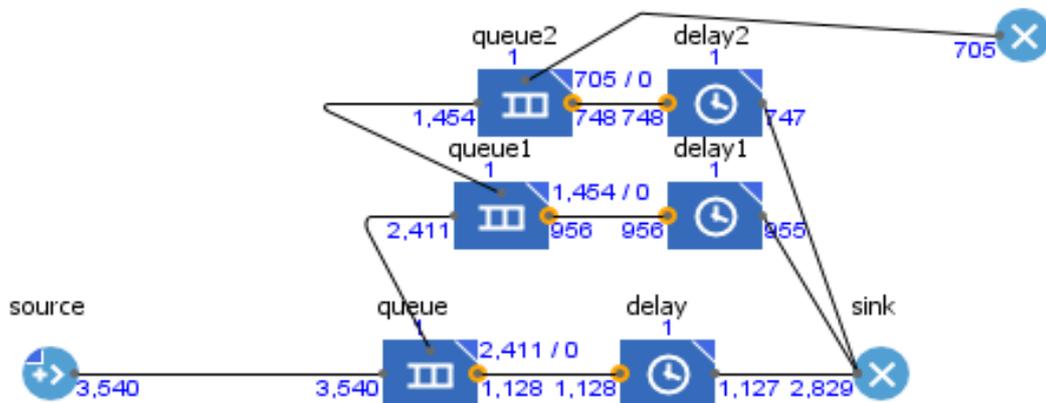


Рисунок 3. Имитационная Модель СМО. Последовательное включение сервисов. Размер планируемой очереди 1 чел.

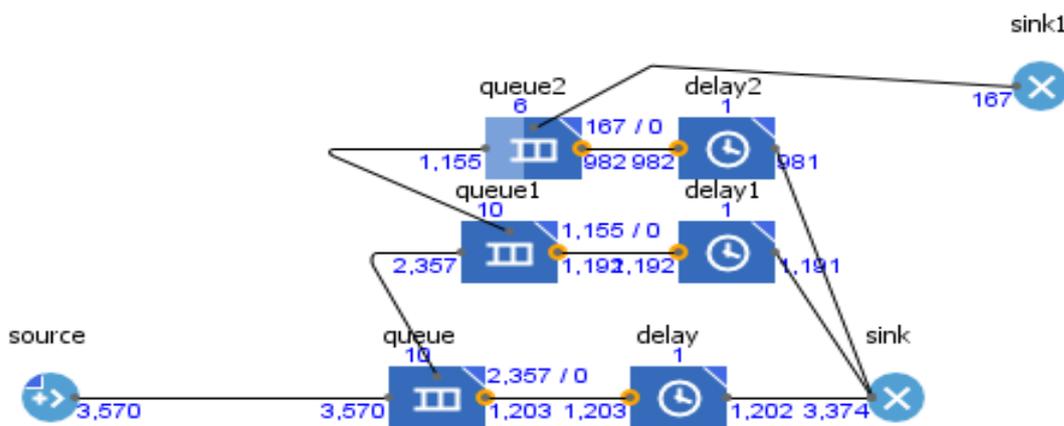


Рисунок 4. Имитационная Модель СМО. Последовательное включение сервисов. Размер планируемой очереди 10 чел.

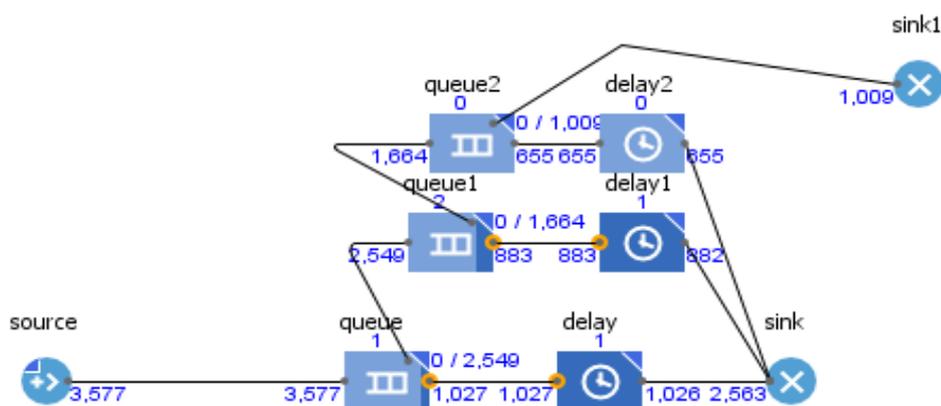


Рисунок 5. Имитационная Модель СМО. Последовательное включение сервисов. Размер планируемой нахождения в очереди 5 мин.

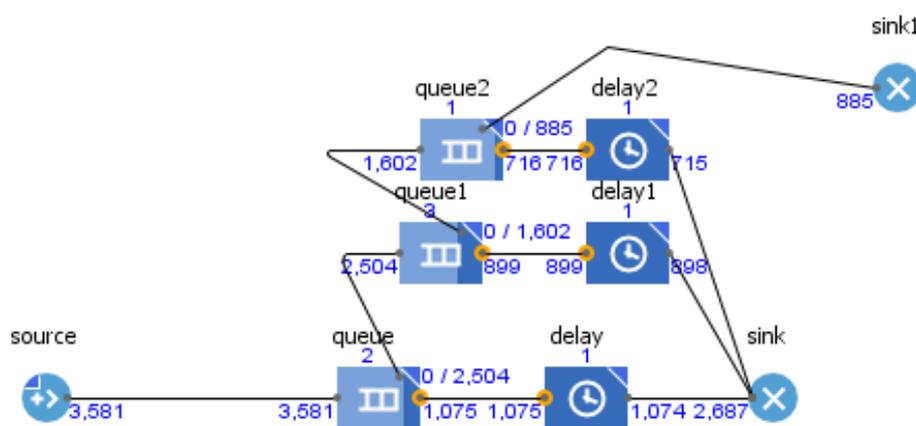


Рисунок 6. Имитационная Модель СМО. Последовательное включение сервисов. Размер планируемой нахождения в очереди 10 мин.

Приведенные расчеты позволяют сказать, что при такой организации работы СМО размер очереди и время нахождения клиента в очереди оказывают значительное влияние на эффективность функционирования СМО. При этом увеличение размера очереди и времени нахождения в ней клиентов уменьшает количество обслуженных клиентов. Так, при увеличении времени нахождения в очереди с 0 мин. до 1 мин. и с 1 мин. до 10 мин. количество необслуженных клиентов уменьшается соответственно с 1385 чел. до 1009 чел., с 1009 чел. до 885 чел. В то же время, как было замечено выше, уменьшение числа необслуженных клиентов в отдельных случаях может быть оправдано из-за влияния стоимостных параметров СМО. Это можно заметить после решения оптимизационной задачи.

Результаты

1. Для тестирования имитационной модели СМО можно использовать модель построенную на основе общей теории СМО, так как при соблюдении допущений в последней результаты расчетов по обеим моделям совпадают.

2. Многостороннее исследование сложных СМО и выработка проектных решений представляется возможным только на основе ИМ, которое позволяет построить адекватную модель реальной СМО с помощью специализированных программных продуктов.

3. Окончательный выбор управляемых параметров СМО может быть принят на основе решения оптимизационной задачи по определению максимума прибыли от эксплуатации СМО.

Список литературы

1. Таха Х. А. Введение в исследование операций. 7-е изд.; пер. с англ. М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. 912 с.: ил.

2. Боев В. Д. Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World : учеб. пособие. СПб. : БХВ-Петербург, 2004. 368 с.: ил.

3. Концептуальное проектирование систем в Anylogic 7 и GPSS World, [Электронный ресурс]. URL: <http://www.intuit.ru/studies/courses/13846/1243/lecture/24488>

4. Боев В. Д. Компьютерное моделирование : пособие для практических занятий, курсового и дипломного проектирования в AnyLogic7. СПб. : ВАС, 2014. 432 с.

5. The AnyLogic Company [Электронный ресурс]. URL: <http://www.anylogic.com/anylogic/help/>. 2014

List of references

1. Taha H. A. *Introduction to Operations Research*, 7th ed.; trans. with English, Moscow : The Williams Publishing House, 2005, 912 p. : ill.

2. Boev V. D. *Modeling systems. GPSS World : training*. Allowance, St. Petersburg : BHV-Petersburg, 2004, 368 p.: ill.

3. *Conceptual design of systems in Anylogic 7 and GPSS World*, <http://www.intuit.ru/studies/courses/13846/1243/lecture/24488>.

4. Boev V. D. *Computer modelling : manual for practical classes, course and diploma design in AnyLogic7*, St. Petersburg : VAK, 2014, 432 p.

5. *The AnyLogic Company*, URL: <http://www.anylogic.com/anylogic/help/>, 2014.